Artikkelen beskriver hvordan Arkimedes tilnærmet seg PI og etter hvert fant en meget god verdi for denne. Sammen med historien vises også hvordan CASIOs FX-991EX kan benyttes i disse utregningene.

# Archimedes og π

Revidert juli-2021

CASIO®

# Archimedes og π

Med en liten kalkulator som CLASSWIZ kan vi bevege oss inn I matematikkens historie og få en forståelse for hvordan en av oldtidens største vitenskapsmenn, Arkimedes fant en verdi for $\pi$ .

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

**Archimedes of Syracuse**

He lived from 287-212 BC and was a Greek mathematician, physicist, engineer, inventor and astronomer. Although few details of his life are known, he is regarded as one of the leading scientists in classical antiquity and generally considered the greatest mathematician of antiquity and one of the greatest of all times.

(picture: [http://www.kidsmathgamesonline.com/pictures/mathematicians/archimedes.html](http://www.kidsmathgamesonline.com/pictures/mathematicians/archimedes.html))

$\frac{223}{71}$ 3.14084507 < $\pi$ 3.141592654 < $\frac{22}{7}$ 3.142857143

Archimedes anticipated modern calculus and analysis by applying concepts of infinitesimals and the method of exhaustion to derive and rigorously prove a range of geometrical theorems, including the area of a circle, the surface area and volume of a sphere, and the area under a parabola and he derived a very accurate approximation of $\pi$ finding

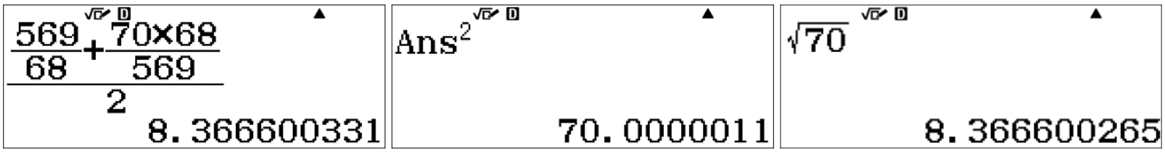
$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7} \Leftrightarrow 3.1408 < \pi < 3.1428;\ \bar{\pi} = 3{,}1418$$

## Det matematiske verktøyet som Arkimeds benyttet.

1. Han kjente til hvordan å finne brøker som gode tilnærminger for røtter: Eksempel $\sqrt{70}$ ? Første til nærming kan være $\sqrt{70} = 8.5 = \frac{17}{2}$ som et gjennomsnitt av heltallsrøttene $8 = \sqrt{64} < \sqrt{70} < \sqrt{81} = 9$ . Den neste tilnærmingen er gjennomsnittet av første tilnærmet verdi og 70 dividert med første tilnærming osv.

$\dfrac{\frac{17}{2} + \frac{70 \times 2}{17}}{2}$ $\frac{569}{68}$ | $\dfrac{\frac{17}{2} + \frac{70 \times 2}{17}}{2}$ 8.367647059 | $\text{Ans}^2$ 70.0175173

Ved å gjenta prosedyren får vi tredje svært god tilnærming nå med 6 korrekte siffer



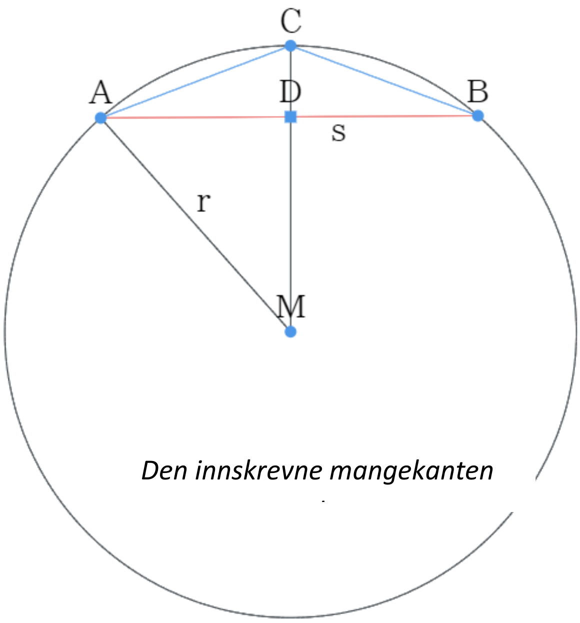

Dette må være veldig bra.

2. Han kjente også til Pytagoras' teorem for rettvinklede trekanter.

Antikkens egypterne brukte $\pi \approx \frac{22}{7}$ og i bibelen kan du lese at $\pi \approx 3$ men uansett er metoden til Arkimedes den mest imponerende.

Metoden til Arkimedes
En regulær mangekant med n sider med lengde s er innskrevet I en sirkel med radius 1. Omkretsen er da n s og en tilnærmet verdi for $\pi \approx \frac{s \cdot n}{2}$

M er sentrum i sirkelen. AB = s er siden i mangekanten og MC er en midtnormal til AB Denne skjærer AB i D. Da blir AC og CB siden i en mangekant med dobbelt så mange sider. Oppgaven blir nå å bestemme CB som en funksjon av AB = s.




*Den innskrevne mangekanten*

**Dette gir oss følgende rekursjon:**

$$AD = \frac{s}{2};\ MD = \sqrt{1-\left(\frac{s}{2}\right)^2} \Rightarrow DC = 1-\sqrt{1-\left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

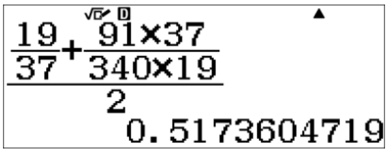
$$CB = \sqrt{DC^2 + DB^2} = \sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{s}{2}\right)^2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{2-\sqrt{4-s^2}}$$

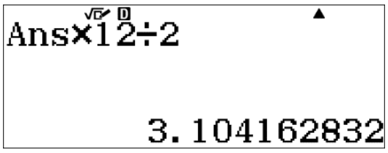
Vi velger $n = 6$ som gir $s_6 = 1$ og videre $s_{12} = \sqrt{2-\sqrt{3}}$ se $CB$ for s = 1. Vi følger metoden til Arkimedes og da vi vet at $\sqrt{3} \approx 1.7$ velger vi om første tilnærming:

$$\sqrt{3} \approx \frac{17}{10} \Rightarrow \sqrt{3} \approx \frac{\frac{17}{10} + \frac{30}{17}}{2} = \frac{589}{340}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx \sqrt{2-\frac{589}{340}} = \sqrt{\frac{91}{340}} \approx \frac{\frac{19}{2}}{\frac{37}{2}} = \frac{19}{37}\sqrt{\frac{91}{340}} \approx \frac{\frac{19}{37} + \frac{91 \cdot 37}{340 \cdot 19}}{2}$$

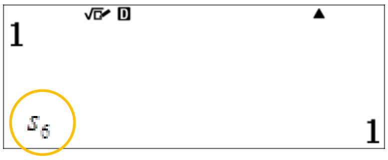
Dette regner vi ut og finner $\pi$ tilnærmet for en regulær 12 kant:

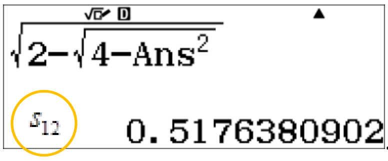


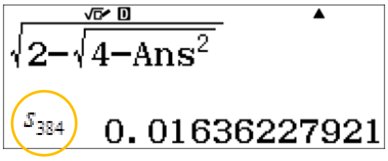



Vi forlater nå metoden til Arkimedes. For deg som ønsker kan du lage neste tilnærming for $\sqrt{3}$ og en ny verdi for $\pi$

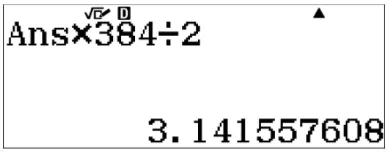
Vi fortsetter med moderne verktøy som ClassWiz fx-991EX og benytter answer Ans til å lage en rekursjon, Rekursjonen starter med en regulær sekskant med side s=1 fortsetter med 12 kant, 24 kant osv. Hvert steg I rekursjonen er: $\sqrt{2-\sqrt{4-Ans^2}}$ som dobler antall sider og regner ut siden.. Rekursjonen gjentas ved å trykke = tast: 1 = √■ 2 − √■ 4 − Ans x² = = = = = =





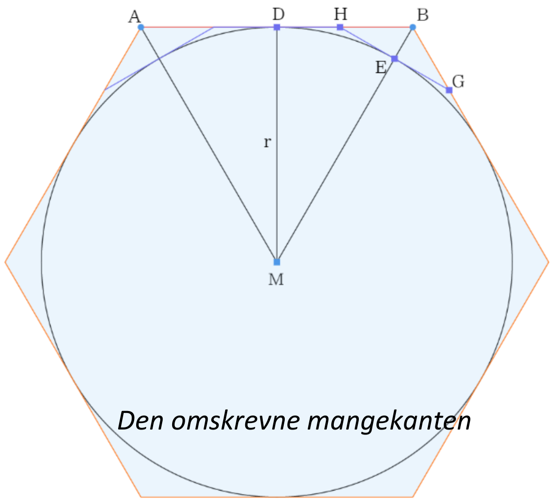
...



Nå kan vi lage et mye bedre estimat for $\pi$ ved å gå ut fra et regulært polygon med $384$ sider hvor $s_{384} \approx 0.01636227921$




Dette må sies å være veldig bra!

Vi fortsetter med den omskrevne mangekanten $AB = s_n = s$ som siden i en regulær mangekant med n sider. Vi lar $DH = HE = EG = x$ og $HG = s_{2n} = 2x$. Oppgaven er nå å bestemme $2x$ som funksjon av $s$.




$$DB = \frac{s}{2};\ HB = \frac{s}{2} - x$$

$$MB = \sqrt{1+\frac{s^2}{4}};\ EB = \sqrt{1+\frac{s^2}{4}} - 1$$

Når $\Delta HEB$ er rettvinklet får vi:

$$HE^2 = HB^2 - EB^2$$

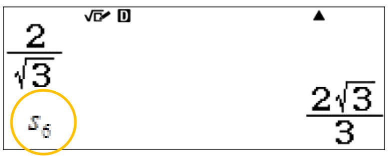
$$x^2 = \left(\frac{s}{2} - x\right)^2 - \left(\sqrt{1+\frac{s^2}{4}} - 1\right)^2$$

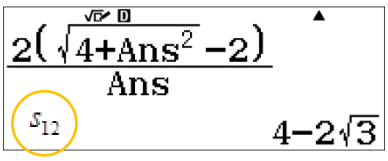
$$= \frac{s^2}{4} - sx + x^2 - 1 - \frac{s^2}{4} + 2\sqrt{1+\frac{s^2}{4}} - 1 \Rightarrow sx = 2\sqrt{1+\frac{s^2}{4}} - 2 \Rightarrow 2x = \frac{2\left(\sqrt{4+s^2} - 2\right)}{s}$$

Dette gir oss en ny rekursjon hvordan å gå fra siden I en regulær mangekant til siden I en regulær mangekant med dobbelt så mange sider.

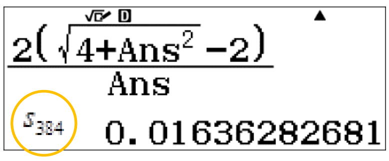
$$s_{2n} = \frac{2\left(\sqrt{4+s_n^2} - 2\right)}{s_n}$$

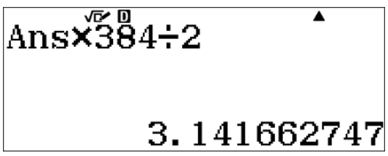
Vi kjenner til at Arkimedes benyttet disse rekursjonene og at han kunne starte enten med en regulær firkant eller en sekskant. Vi velger en regulær sekskant med side $s_6 = \frac{2}{\sqrt{3}}$ og gjentar rekursjonen:



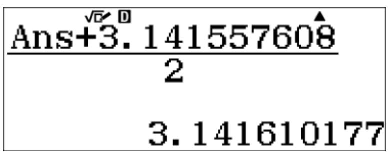




...




Regner vi ut gjennomsnitt for den innskrevne og omskrevne sirkel får vi svært god god tilnærming til $\pi$:



**Vi utfordrer leseren til å starte med innskrevet kvadrat $s_4 = \sqrt{2}$ og et omskrevet med $s_4 = 2$. Rekursjonene er de samme. Lykke til!**

**Vi kan selvsagt også benytte regnearket på CLASSWIZ**

**Innskrevne mangekanter:**

**A1 = 6, A2 = 2XA1, B1 = 1 og** $\mathrm{B2} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - \mathrm{B1}^2}}$ $\quad C1 = \frac{A1 \bullet B1}{2}$ **RANGES A2: A16 B2:B16 C1:C16**

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 1 | 3 | |
| 2 | 12 | 0.5176 | 3.1058 | |
| 3 | 24 | 0.261 | 3.1326 | |
| 4 | 48 | 0.1308 | 3.1393 | |

=A1×B1÷2

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 192 | 0.0327 | 3.1414 | |
| 7 | 384 | 0.0163 | 3.1415 | |
| 8 | 768 | $8.1\times10^{-3}$ | 3.1415 | |
| 9 | 1536 | $4\times10^{-3}$ | 3.1415 | |

=A9×B9÷2

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 1536 | $4\times10^{-3}$ | 3.1415 | |
| 10 | 3072 | $2\times10^{-3}$ | 3.1415 | |
| 11 | 6144 | $1\times10^{-3}$ | 3.1415 | |
| 12 | | | | |

=A11×B11÷2

**Og for omskrevne mangekanter:**

**Vi forandrer B** $\mathrm{B1} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ; $\mathrm{B2} = \frac{2(\sqrt{4 + \mathrm{B1}^2} - 2)}{\mathrm{B1}}$

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 1.1547 | 3.4641 | |
| 2 | 12 | 0.5358 | 3.2153 | |
| 3 | 24 | 0.2633 | 3.1596 | |
| 4 | 48 | 0.131 | 3.146 | |

=A1×B1÷2

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 5 | 96 | 0.0654 | 3.1427 | |
| 6 | 192 | 0.0327 | 3.1418 | |
| 7 | 384 | 0.0163 | 3.1416 | |
| 8 | 768 | $8.1\times10^{-3}$ | 3.1416 | |

=A8×B8÷2

| | A | B | C | D |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 768 | $8.1\times10^{-3}$ | 3.1416 | |
| 9 | 1536 | $4\times10^{-3}$ | 3.1415 | |
| 10 | 3072 | $2\times10^{-3}$ | 3.1415 | |
| 11 | 6144 | $1\times10^{-3}$ | 3.1415 | |

=A11×B11÷2

**EN IMPONERENDE LITEN KALKULATOR!**